数理解析研究所講究録
17巻 1966年 35-52

線型計算

広大理　新谷尚義

§1 記号の約束

とくにことわらない限り、実数の要素をもつ $n \times n$ の行列と複素数の要素をもつ n ベクトル だけを考えることにする。 A^T で A の転置行列, $\bar{A}^T$ で A の共役転置行列を表わす. A の行列式を $|A|$ または det(A), で表わし、 A の跡和を tr(A) とかくことにする.
A の固有値を $\lambda_i(A)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ で表わし、A の固有値であることが明らかな場合には 単に λ_i とかくことにする. 今後 $\lambda_i(A)$ は絶対値の大小順に番号がつけられているものとする. すなわち

(1.1) $$|\lambda_1(A)| \geqq |\lambda_2(A)| \geqq \cdots \geqq |\lambda_n(A)|$$

である.

(1.2) $$\rho(A) = |\lambda_1(A)|$$

を A のスペクトル半径,

(1.3) $$\|A\|_S = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}}$$

を A のスペクトラル・ノルム とよぶ. これに対して

(1.4) $$\|A\|_E = tr(A^T A)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

を A の ユークリディアン・ノルム という.

ベクトル x に対して

(1.5) $$(x,\ x)^{\frac{1}{2}} = (x^T\bar{x})^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

を x の ノルム という.

A が 正則行列 であるとき.

(1.6) $$\Lambda(A) = \|A\|_S\|A^{-1}\|_S$$

を A の スペクトル 条件数 という.

(1.7) $$p(A) = \rho(A)\rho(A^{-1})$$

を A の p 条件数という。A^{-1} の固有値は $1/\lambda_i(A)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ だから

(1.8) $$\Lambda(A) = (\lambda_1(A^TA)/\lambda_n(A^TA))^{\frac{1}{2}}$$

(1.9) $$p(A) = |\lambda_1(A)/\lambda_n(A)|$$

とかける.

§ 2 正値行列

A が 対称行列 で $\lambda_i(A) > 0$, $(i=1,2,\ldots,n)$ であるとき, A は 正値行列 であるという.

定理 1　対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, $(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_n)$ とすると、任意のベクトル x $(x \neq 0)$ に対して

$$(2.1) \qquad \mu_n \leqq (x, Ax)/\|x\|^2 \leqq \mu_1$$

が成り立つ。

定理 2　$B = A^T A$ は対称で $\lambda_i(B) \geqq 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$ である。また

$$(2.2) \qquad \lambda_n(B) \leqq |\lambda_i(A)|^2 \leqq \lambda_1(B), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(2.3) \qquad |\lambda_i(A)| \leqq \|A\|_S \leqq \|A\|_E$$

$$(2.4) \qquad \|A\|_E/\sqrt{n} \leqq \|A\|_S$$

が成りたつ。

系 1　A が正則ならば、$A^T A$ は正値である。

系 2　A が対称ならば $\lambda_i(A^T A) = \lambda_i^2(A), (i = 1, 2, \ldots, n)$ である。

系 3　A が対称ならば

$$(2.5) \qquad \rho(A) = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\|_S = \rho(A)$$

が成りたつ。さらに A が正則のときは

(2.6) $$p(A) = \Lambda(A) = p(A^T A)^{\frac{1}{2}}$$

である。

系4　正則行列 A に対して 次の式が成りたつ。

(2.7) $$p(A) \leqq \Lambda(A) \leqq \Lambda(A)^2 = \Lambda(A^T A)$$

(2.8) $$p(A) \leqq p(A)^2 \leqq p(A^T A).$$

系5　A が正則ならば，次の式が成りたつ。

(2.9) $$\lambda_n(A^T A) > |A|^2/(\|A\|_E^2/(n-1))^{n-1}$$

(2.10) $$\Lambda(A) < \|A\|_E(\|A\|_E/\sqrt{n-1})^{n-1}/|\det(A)|$$

(2.11) $$\Lambda(A) \leqq \|A\|_E\|A^{-1}\|_E .$$

定理 2　行列 A が正値ならば、$a_{ii} > 0$, $(i = 1,2,\ldots n)$ である。

§3 固有値の限界

固有値を実際に求めなくても、その限界がわかれば十分である場合もあり、また誤差評価のためにも必要があるので、固有値の限界について知られている結果を少しあげておく。

定理 3 (Gerschgorin)

(3.1) $$r_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

とおくと、$\lambda_i(A)$ は複素平面上の n ヶの円

(3.2) $$K_j:\ |z - a_{jj}| \leqq r_j,\quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

からなる閉集合 $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$ の中にある。

系 1　$\lambda_i(A)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ は n ヶの円

(3.3) $$C_j:\ |z - a_{jj}| \leqq s_j,\quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

からなる閉集合 $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ の中にある。ただし

(3.4) $$s_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|,\quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

である。

系 2　$\lambda_i(A)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ は $(\bigcup_{j=1}^{n} K_j)\cap(\bigcup_{j=1}^{n} C_j)$ の中にある。

系 3

(3.5) $$\rho(A) \leqq \min(\max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|,\ \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|)$$

(3.6) $$1/\rho(A^{-1}) \geqq \max[\min_i(|a_{ii}| - r_i),\ \min_i(|a_{ii}| - s_i)]$$

定理 4 (Gerschgorin)　円 K_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$ のうち m ヶが交わって連結閉集合 H_m を作り、他の円は H_m と共通点をもたないならば、

ちょうど m ケの固有値が H_m の中にある。

定理 5 (Schur) 行列 A に対して次の式が成りたつ。

(3.7) $$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqq \|A\|_E^2 .$$

定理 6 対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, $(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \dots \geqq \mu_n)$ とする。任意の $h-1, (1 \leqq h \leqq n)$ ケのベクトル $\alpha_i (i=1,2,\dots,h-1)$ を選んで固定する。条件

(3.8) $$\|x\| = 1, \quad (x, \alpha_i) = 0, \quad (i = 1,2,\dots,h-1)$$

をみたす あらゆるベクトル x についての (x, Ax) の上限を $J_h(\alpha)$ とすると、

(3.9) $$J_h(\alpha) = \sup_{x} (x, Ax) \geqq \mu_h$$

が成りたつ。また、あらゆる α_i の選び方についての $J_h(\alpha)$ の下限は μ_h に等しい。すなわち

(3.10) $$\inf_{\alpha} J_h(\alpha) = \mu_h$$

が成りたつ。

実際には 上限下限の値をとるベクトル x, α が存在するから、

(3.11) $$\mu_h = \min_{\alpha} \left\{ \max_{x \neq 0} (x, Ax)/\|x\|^2 \ : \ (x, \alpha_i) = 0, \ (i=1,2,\dots,h-1) \right\}$$

とかける。

系　A が対称行列，B が正値行列であるとき，$B^{-1}A$ の固有値を $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$，$(\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_n)$ とすると，

$$(3.12)\quad \nu_h = \min_{\alpha}\left\{\max_{x\neq 0}(x, Ax)/(x, Bx) : (x, \alpha_i) = 0 \ (i=1,2,\ldots,h-1)\right\}$$

が成りたつ．また B の最大固有値を ω_1 最小固有値を ω_n とすると

$$(3.13)\qquad \omega_1\nu_h \geqq \mu_h \geqq \omega_n\nu_h, \quad (h=1,2,\ldots,n)$$

が成りたつ．

定理 7　対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$，$(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_n)$，対称行列 B の固有値を $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$，$(\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_n)$，　行列 A − B の最大固有値を ω_1 最小固有値を ω_n とすると，

$$(3.14)\qquad \omega_n \leqq \mu_h - \nu_h \leqq \omega_1, \quad (h=1,2,\ldots,n)$$

が成りたつ。

系　対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$，$(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_n)$，対角要素 a_{ii}，$(i=1,2,\ldots,n)$ を大小順に並べたものを $d_1, d_2, \ldots, d_n$，$(d_1 \geqq d_2 \geqq \ldots \geqq d_n)$ とする。

$$(3.15)\qquad s = \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad t = \max_i \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

とおくと

(3.16) $|\mu_i - d_i| \leqq s$, $|\mu_i - d_i| \leqq t$, $(i = 1,2,\ldots,n)$

が成りたつ。

定理 2 (Collatz) A を対称行列, 0 を要素にもたない任意の実ベクトルを v とし、 $w = Av$ とおく。

(3.17) $$l_M = \max_i \; w_i/v_i \; , \quad l_m = \min_i \; w_i/v_i$$

とすると、 $l_M \geqq \lambda \geqq l_m$ であるような固有値 λ が少なくとも 1 つある。

§ 4 行列のノルム

行列の大きさを測る尺度として、次の条件をみたす実数 $\|A\|$ を導入し A のノルムという。

(1) $\|A\| \geqq 0$ で, $A = 0$ のときに限り、 $\|A\| = 0$
(2) 任意の数 c に対して $\|cA\| = |c|\,\|A\|$
(3) $\|A + B\| \leqq \|A\| + \|B\|$
(4) $\|AB\| \leqq \|A\|\,\|B\|$

$\|A\|_S$, $\|A\|_E$ はこれらの条件をみたしている。以下簡単のために、 $\|A\|_S$ を単に $\|A\|$ とかくことにする。

定理 3 x を 0 でない任意のベクトルとするとき

(4.1) $$\|A\| = \max_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$$

である。

系 任意のベクトル x に対して、次の式が成りたつ。

(4.2) $$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

定理 10 $\|A\| < 1$ ならば、$I + A$ は正則で

(4.3) $$\|(I+A)^{-1}\| \leqq 1/(1-\|A\|)$$

(4.4) $$\|(I+A)^{-1}-I\| \leqq \|A\|/(1-\|A\|)$$

が成りたつ。

系1 A が正則で $\|A^{-1}B\| < 1$ ならば、$A + B$ も正則で

(4.5) $$\|(A+B)^{-1}-A^{-1}\| \leqq k\|A^{-1}\|,\ k = \|A^{-1}B\|/(1-\|A^{-1}B\|)$$

が成りたつ。

系2 $\|A\| < 1$ ならば、次の式が成りたつ。

(4.6) $$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^r + (I-A)^{-1}A^{r+1}$$

(4.7) $$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^r + \ldots$$

この定理の証明では、$|\lambda_i(I+A)| \geqq 1-\lambda_i(A) \geqq 1-\|A\| > 0$ であることを使う。$\|A\|_E < 1$ ならば $\|A\| \leqq \|A\|_E < 1$ だから、$\|\ \|$ を $\|\ \|_E$ で置きかえ

44
ても 定理 10 と系 は成りたつ。

§5 評価式と近似式

数値計算にかけられる行列の要素は，誤差を伴っているのが普通である。また、計算の途中で丸められるから、えられた数値解は、与えられた行列に対する線型計算の問題の正確な解ではなく、もとの行列に近い、値が少し変った要素をもつ行列に対する問題の正確な解であると考えられる。そこで係数が少し変化したとき、解にどのような影響があるかを調べよう。また近似解の誤差評価についても考えよう。

5.1 連立1次方程式

定理 11 x を方程式 $Ax = b$ の解，A が $A + \delta A$ b が $b + \delta b$ に変ったときの解を $x + \delta x$ とする。このとき $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ ならば次の式が成りたつ。

(5.1) $\|\delta x\| \leqq [\|A^{-1}\delta A\|\|b\| + \|\delta b\|]\ \|A^{-1}\|/(1 - \|A^{-1}\delta A\|)$

(5.2) $\|\delta x\|/\|x\| \leqq [\|\delta b\|/\|b\| + \|\delta A\|/\|A\|]\Lambda(A)/(1 - \|A^{-1}\delta A\|)$

系 1

(5.3) $$z = A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

とおく。$\|A^{-1}\delta A\| < 1$ ならば次の式が成りたつ。

(5.4) $$\delta x = z - (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A z$$

系 2　　$\delta A = (\delta a_{ij})$, $A^{-1} = (c_{ij})$, $\delta b = (\delta b_i)$, $z = (z_i)$,　とする。

(5.5)　　$|\delta b_i| \leqq \varepsilon$, $|\delta a_{ij}| \leqq \varepsilon$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$

ならば、次の式が成りたつ。

(5.6)　　$|z_i| \leqq e\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|$,　$e = \varepsilon(1 + \sum_{j=1}^{n}|x_j|)$.

定理 12　　x を方程式 $Ax = b$ の解、x^* を近似解とし、

(5.7)　　$r = b - Ax^*$

とおくと次の式が成りたつ。

(5.8)　　$\|x - x^*\| \leqq \|A^{-1}\|\|r\|$

(5.9)　　$\|x - x^*\|/\|x\| \leqq \Lambda(A)\|r\|/\|b\|$.

系

(5.10)　　$\|x - x^*\| < \|r\|(\|A\|_E/\sqrt{n-1})^{n-1}/|\det(A)|$

(5.11)　　$\|x - x^*\|/\|x\| < (\|r\|/\|b\|)\|A\|_E(\|A\|_E/\sqrt{n-1})^{n-1}/|\det(A)|$

5.2 逆行列

定理 13　　$A^{-1} = B$, $(A + \delta A)^{-1} = B + \delta B$ とおく。このとき $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ ならば、次の式が成りたつ。

(5.12) $$\|\delta B\| \leqq \|B\|^2 \|\delta A\| / (1 - \|A^{-1}\delta A\|)$$

(5.13) $$\|\delta B\| / \|B\| \leqq (\|\delta A\| / \|A\|) \Lambda(A) / (1 - \|A^{-1}\delta A\|)$$

系　$C = -A^{-1}\delta A A^{-1}$ とおくと、$\|A^{-1}\delta A\| < 1$ ならば δB は次のようにかける。

(5.14) $$\delta B = C - (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\delta A C$$

定理 14　B^* を $B = A^{-1}$ の近似行列とし、$R = I - B^* A$ とおくと

(5.15) $$\|B - B^*\| / \|B\| \leqq \|R\|$$

である。また $\|R\| < 1$ ならば次の式が成りたつ。

(5.16) $$\|B - B^*\| \leqq \|B^*\| \|R\| / (1 - \|R\|)$$

(5.17) $$B = (I-R)^{-1} B^* = B^* + RB^* + R^2 B^* + \dots + R^r B^* + (I-R)^{-1} R^{r+1} B^*$$

系1　$\mathbf{x}$ を方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解、$\mathbf{x}^*$ を近似解、$\mathbf{r}$ を残差ベクトルとする。このとき $\|R\| < 1$ ならば次の式が成りたつ。

(5.18) $$\mathbf{x} - \mathbf{x}^* = B^*\mathbf{r} + RB^*\mathbf{r} + \dots + R^r B^*\mathbf{r} + (I-R)^{-1} R^{r+1} B^*\mathbf{r}$$

系2　$\|R\|_E < 1$ のとき

(5.19) $$\omega = \|B^*\|_E / (1 - \|R\|_E)$$

とおくと次の式が成りたつ。

(5.20) $$\|B\|_E \leqq \omega, \quad \Lambda(A) \leqq \omega \|A\|_E$$

(5.21) $$\|B - B^*\|_E \leqq \omega \|R\|_E$$

(5.22) $$\|x - x^*\| \leqq \omega \|r\|$$

(5.23) $$\|B - B^* - \sum_{k=1}^{r} R^k B^*\|_E \leqq \omega \|R\|_E^{r+1}$$

(5.24) $$\|x - x^* - \sum_{k=1}^{r} R^k B^* r\| \leqq \omega \|r\| \|R\|^{r+1}$$

系 3

(5.25) $$\|B - B^*\|_E / \|B\|_E \leqq \|R\|_E$$

(5.26) $$\|x - x^*\| / \|x\| \leqq (\|r\| / \|b\|) \|A\|_E \omega, \quad (\|R\|_E < 1)$$

5.3 行列式

定理 15　$|\delta a_{ij}| \leqq \varepsilon$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$　ならば

(5.27) $$|A + \delta A| - |A| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta a_{ij} A_{ji} + O(\varepsilon^2)$$

が成りたつ。ただし A_{ij} は a_{ij} の余因子である。

系　$|A| \neq 0$ ならば 次の式が成りたつ。

(5.28) $$|A + \delta A| - |A| = |A| \operatorname{tr}(A^{-1} \delta A) + O(\varepsilon^2)$$

5.4 固有値

定理 16　A, $A + \delta A$ が対称行列であるとき，その固有値をそれぞれ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, $(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_n)$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, $(\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \cdots \geqq \nu_n)$ とする。

$$|\delta a_{ij}| \leqq \varepsilon, \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

ならば，

48 .

$$|\mu_i - \nu_i| \leqq n\varepsilon , \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{5.29}$$

である。

定理 17　λ を対称行列 A の固有値, x, ($\|x\| = 1$) を λ に対応する固有ベクトルとする。λ^* を λ の近似値, x^*, ($\|x^*\| = 1$) を x の近似ベクトルとし、

$$x^* = x + \varepsilon , \quad y = Ax^* - \lambda^* x^* , \quad \tilde{\lambda} = \lambda^* + (x^*, y) \tag{5.30}$$

とおくと次の式が成りたつ。

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leqq \|A - \lambda I\| \|\varepsilon\|^2 \tag{5.31}$$

また、

$$\tilde{\eta} = (A - \tilde{\lambda} I)x^* , \quad \xi = (A - \tilde{\lambda} I)\tilde{\eta} \tag{5.32}$$

$$\gamma = \|\tilde{\eta}\|^2 , \quad \beta = (\xi , \tilde{\eta}) , \quad \alpha = \gamma^2 - \|\xi\|^2 , \quad \omega = \alpha^2 + 4\gamma\beta^2 \tag{5.33}$$

とおく。 $\omega \neq 0$ ならば、

$$X_1 = 2\beta^2/(\omega + |\alpha|\sqrt{\omega}) , \quad X_2 = (1 + |\alpha|/\sqrt{\omega})/(2\gamma) \tag{5.34}$$

$$c = \begin{cases} -\mathrm{sgn}(\beta)\sqrt{X_2} , & (\alpha \geqq 0) \\ -\mathrm{sgn}(\beta)\sqrt{X_1} , & (\alpha < 0) \end{cases} , \qquad d = \begin{cases} \sqrt{\gamma X_1} , & (\alpha \geqq 0) \\ \sqrt{\gamma X_2} , & (\alpha < 0) \end{cases} \tag{5.35}$$

$$\tilde{x} = dx^* + c\tilde{\eta} \tag{5.36}$$

とおくと、 $\|\tilde{x}\| = 1$ で

$$\|(A - \tilde{\lambda} I)x^*\|^2 - \|(A - \tilde{\lambda} I)\tilde{x}\|^2 = \begin{cases} (\sqrt{\omega} + |\alpha|)/(2\sqrt{\gamma}) , & (\alpha \geqq 0) \\ (2\beta^2\sqrt{\gamma}/(\sqrt{\omega} + |\alpha|)) , & (\alpha < 0) \end{cases} \tag{5.37}$$

が成りたつ

§6 数値解法

6.1 条件の悪い行列

(5.2), (5.13)式から条件数 $\Lambda(A)$ の大きい行列では、わずかな係数の変化が解に大きな影響を及ぼす可能性があることがわかる。たとえば、方程式

(6.1) $$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad と \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x + 1.00001y = 2 \end{cases}$$

とはわずかしか違わない。そして解も $x = 1,\ y = 1$ と $x = 0.999987,\ y = 1.00001$ で少ししか違わない。この場合 $\Lambda(A) \fallingdotseq 27,\ \ p(A) \fallingdotseq 18$ である。同様に、

(6.2) $$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 3x + 4.00001y = 7.00001 \end{cases}$$

と

(6.3) $$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 3x + 3.99999y = 7.00004 \end{cases}$$

とは余り違わない。しかし解は $x = 1,\ y = 1$ と $x = 7+2/3,\ y = -4$ で全く違う。したがって一方を他方の近似と考えるわけには ゆかない。(2) 式に対しては $\Lambda(A) \fallingdotseq 1666669,\ \ p(A) \fallingdotseq 1633336$ である。

また、

(6.4) $$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 3x + 3.999992y = 7.000042 \end{cases}$$

は (3) 式と $\varepsilon = 2 \times 10^{-6}$ しか違わないが、解は $x = 9 + 1/3,\ y = -5.25$ で ε だけの変化が $10^6\varepsilon$ 程度の変化をもたらしている。6 桁の計算で解きたいときには、7 桁目を丸めねばならないから、(3)

式になり、それを正確に解いても全く違った答がえられることになる。
この場合 $\Lambda(A) \doteqdot 2083331$, $p(A) \doteqdot 2041659$ である。

このように、係数の値がわずかしか変らないのに、解は大きく変化するような行列のことを、条件の悪い行列であるという。条件の良し悪しを測る尺度として条件数を使う意味も (5.2), (5.13) 式から明らかであろう。$\Lambda(A)$ は A^TA の固有値を求めないとえられないが、$|A|$ または A^{-1} が求めてあれば (2.10) 式または (5.20) 式によって見積ることができる。

上の例からもわかるように、条件の悪い行列の場合には、丸めの誤差が大きく作用するので、桁数をふやすなどして丸めの誤差の影響をへらす工夫をしなければ、似ても似つかない答がえられる恐れがある。

定理 16 により、対称行列の場合には要素が少し変化すれば固有値も少し変るが、非対称行列の場合には、このことは必ずしも成りたたない。フォーサイスによる次の例を考えよう。

(6.5)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & 1 \\ \varepsilon & 0 & \cdots & \cdots & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

A の固有方程式は $\lambda^n - (-1)^n\varepsilon = 0$ で $\varepsilon = 0$ のときは $\lambda_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ であるが、$\varepsilon \neq 0$ ならば λ_i は $(-1)^n\varepsilon$ の n 乗根である。たとえば、$\varepsilon = 10^{-10}$ で $n = 10$ のときは、$|\lambda_i| = 10^{-1}$。要素の1つが 10^{-10} 変化しただけで固有値は $10^9\,\varepsilon$ の変化をすることになる。

6.2 残差

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の近似解 $\mathbf{x}^*$, $B = A^{-1}$ の近似行列 B^* がえられると、残差ベクトル $\mathbf{r}$ と 残差行列 R が求められる。すると (5.22), (5.21) 式によって 誤差 $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}$, $B^* - B$ のノルムの絶対評価ができ、(5.26), (5.25) 式によって 相対評価ができる。これらの式から、残差が小さいから誤差も同程度に小さいとはいえないことがわかる。実際、

$$(6.6) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-1/n^2 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1+n-n^2 & n^2-n \\ n^2 & -n^2 \end{pmatrix}, \ (n > 1)$$

とすると、

$$(6.7) \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、B^* は B のより近似になっているように見えるが、

$$(6.8) \qquad B^* - B = \begin{pmatrix} n & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|B - B^*\|_E = \sqrt{2}n$$

である。(5.21) 式を使うと、

$$(6.9) \qquad \|R\|_E^2 = 1/n^2, \quad \|B^*\|_E^2 = (4n^4 - 4n^3 + 2n + 1)$$

$$(6.10) \qquad \|B - B^*\|_E \leqq 2n[1 + (4n^3 - 4n^2 + 2n + 1)/(4n^2(n-1)^2)]^{\frac{1}{2}}$$

がえられる。この場合 $p(A) = \Lambda(A) = [4n^2 - 2 + 1/n^2 + (2n^2-1)\sqrt{4+1/n^4}]/2$ である。

52

6.3 近似解の改良

$Ax = b$ の近似解 x^* と A^{-1} の近似行列 B^* が求められたとき、$\|R\|_E < 1$ ならば 定理 14 と系とにより、次のようにして x^*, B^* を改良することができる。

$$(6.11)\qquad x_0^* = x^*,\quad r_0 = B^* r,\quad B_0^* = B^*,\quad C_0 = RB^*$$

$$(6.12)\qquad x_{i+1}^* = x_i^* + r_i,\quad r_{i+1} = Rr_i$$

$$(6.13)\qquad B_{i+1}^* = B_i^* + C_i,\quad C_{i+1} = RC_i,\quad (i=0,1,\ldots)$$

対称行列の固有値の近似値 λ^*, 近似固有ベクトル x^* が求められたときは、定理 17 を使って λ^*, x^* を改良することができる。

連立一次方程式を消去法などの直接法で解くときには、逆行列と行列式の値を同時に求めておくことが望ましい。そうしておくと、行列の条件の良し悪しがわかり、誤差の見積りができ、さらに近似解の改良ができるからである。また積和 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ を作るときには、丸めの誤差をへらすために 2 倍桁で計算することが望ましい。